MAI 2 - domácí úkol 2
(základní pojmy u funkcí více proměnných)

Pokuste se příklady a problémky vyřešit, nebo aspoň formulujte otázky k řešení daných úloh, proč vám to „nejde“ vyřešit. I tő se bude „počítat“.

1. Pokuste se rozhodnout, zda následující funkce jsou spojité v R^2:
   a) $f(x,y)=(x+y)^2.\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$;

   b) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

2. „Mechanické“ derivování (i když jsme na cvičení nestihli parciální derivace počítat, zkuste to sami, na cvičení budeme pokračovat):
   Vypočítejte parciální derivace 1. a 2.řádu všude, kde existují, funkcí:
   a) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; $f(x,y)=\exp(x^2-y-\frac{x}{y})$;

   b) $f(x,y,z)= xy+yz+xz$; $f(x,y,z)=\sqrt{z-x^2-y^2}$); $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$.

   Zjistěte, kde jsou dané funkce diferencovatelné a určete v těchto bodech jejich totální diferenciál.

3. Základní „slovíčka“ (vyřešte nebo zkuste zjistit, co „nevíte):
   Je dána funkce $f(x,y)=\log(\sqrt{y+1}-x)$.
   a) Najděte a načrtněte definiční obor D funkce f, vyšetřete spojitost funkce f v definičním oboru;
   b) Vypočítejte gradient $\nabla f(0,0)$.
   c) Ukažte, že funkce f má v bodě $[0,0]$ totální diferenciál a určete jej.
      Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce v bodě $[0,0,0]$.
   d) Vypočítejte přibližně pomocí lineární aproximace f(- 0,04; 0,02).

4. Ukažte, že pro „malá“ x,y platí: $arctg\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\cong x+y$.

A můžete zkusit promyslet i trošku „hezčí“ příklady (probereme na příštím cvičení):

1. Ukažte, že funkce $f(x,y)=\sqrt{|x.y|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$, i když existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
2. Je dána funkce f : $f(x,y)=xy$ pro $|x|\geq|y|$, $f(x,y)=0$ pro $|x|<|y|$.
   a) Vyšetřete spojitost funkce f v R^2;
   b) Vypočítejte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;
   c) Vyšetřete, zda je funkce f v bodě $(0,0)$ diferencovatelná.
   d) Ukažte, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.